Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2021

Оглавление

9 КЛАСС 3
10 КЛАСС 6
11 КЛАСС 9
ОТБОРОЧНЫЙ ТУР 12
9 КЛАСС 12
10 КЛАСС 16
11 КЛАСС 21

9 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$\mathrm{C}_{11}^1 + \mathrm{C}_{11}^3 + \mathrm{C}_{11}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p. Решение обоснуйте.

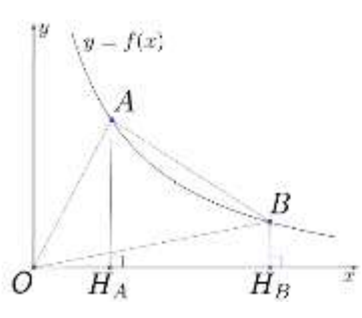
Решение. Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$. Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1, x = y = 2$ и $x = 3, y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак =, стандартные арифметические операции и элементарные функции.

Решение. Например, $\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ (|x-1| + |y-1|)(|x-2| + |y-2|)(|x-3| + |y-4|) = 0 \end{cases}$.

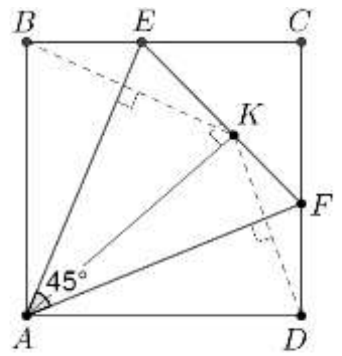
4. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$**.**

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF. Решение обоснуйте.



Решение. Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

6. Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$. Решение обоснуйте.

Решение.

1 способ

Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

2 способ

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \dots}}}$

Решение. Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \dots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \dots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\max A = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2} + 1\right)^{2020}$$

Докажите или опровергните следующие утверждения: 1) множество A и множество B содержат конечное число членов; 2) все элементы множеств A и B – целые числа; 3) $\max B \geq 2$.

Решение. 1) верно: если множество A или множество B бесконечно, то и множество C будет бесконечно. Поэтому можем обозначить через a, b, c максимальные элементы этих множеств соответственно и заметить для решения п.3, что $a + b = c$. Отдельно отметим, что такие множества существуют: например, $A = \{0, \dots, a\}$, $B = \{0, \dots, c - a\}$.

2) верно: через разложение по биному доказывается, что a целое. Тогда если бы B содержало нецелые, то и C содержало бы нецелые. Поэтому все элементы множества B целые. Отсюда аналогично получаем, что все элементы множества A целые.

3) утверждение верно.

Заметим, что $2020 = 5 \cdot 404$, $2828 = 7 \cdot 404$, $a < 1 + a_1$, где

$$a_1 = \left((\sqrt{2} + 1)^5\right)^{404} = (41 + 29\sqrt{2})^{404} = (82.0 \dots)^{404} < 127^{404} =$$
$$= 128^{404}(1 - \tfrac{1}{128})^{404} < 2^{7 \cdot 404}(1 - \tfrac{1}{128}) < 2^{2828} - 2.$$

Тогда $b = c - a > 2^{2828} - (1 + 2^{2828} - 2) = 1$.

10 КЛАСС

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 11.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов
$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \cdots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

2 способ

Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{10} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10}.

Ответ: 1024.

2. Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p.

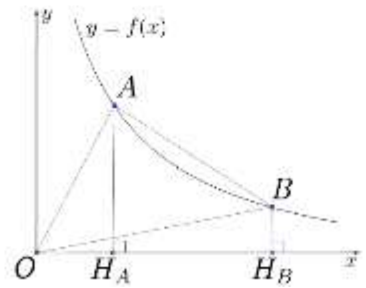
Решение. Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства: $a + b = 5p; ab = 2p^3$. Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим: $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдём $p = 3$.

Ответ: 3.

3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y, чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1, x = y = 2$ и $x = 3, y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y, разрешается использовать скобки, знак =, стандартные арифметические операции и элементарные функции

Решение. Например, $\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ (|x-1| + |y-1|)(|x-2| + |y-2|)(|x-3| + |y-4|) = 0 \end{cases}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс;

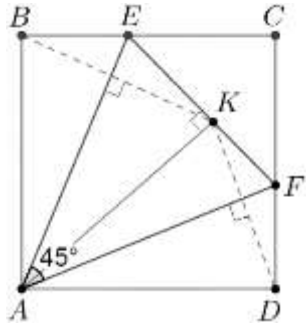


O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте. При условии $f(1) = 4$ запишите в ответ число $f(2)$.

Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$**.**

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF.



Решение. Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A.

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

Ответ: 2.

6. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Решение.

1 способ

Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

2 способ

Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение. Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86+41\sqrt{86}}, \sqrt{86+41\sqrt{86+41\sqrt{86}}}, \dots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{86+41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т. д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

8. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение: Замена $t = \cos\varphi$. Уравнение примет вид: $32\cos^5\varphi - 40\cos^3\varphi + 10\cos\varphi = \sqrt{3}$. Преобразуем левую часть:

$$2\cos\varphi(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5) = [\text{формулы понижения}] =$$
$$= 2\cos\varphi(4(1+\cos 2\varphi)^2 - 10 - 10\cos 2\varphi + 5) =$$
$$= 2\cos\varphi(4\cos^2 2\varphi - 2\cos 2\varphi - 1) == 2\cos\varphi(2(1+\cos 4\varphi) - 2\cos 2\varphi - 1)$$
$$== 2\cos\varphi(-4\sin 3\varphi \sin\varphi + 1) = -4\sin 3\varphi \sin 2\varphi + 2\cos\varphi =$$
$$= -2(\cos\varphi - \cos 5\varphi) + 2\cos\varphi = 2\cos 5\varphi.$$

Окончательно, $\cos 5\varphi = \sqrt{3}/2$. Отсюда $\varphi = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. Поскольку у первоначального уравнения ровно пять действительных корней (по условию), то, чтоб их предъявить, достаточно взять какие-нибудь пять значений φ, косинусы которых различны. Например, $\varphi \in \{6^0, 78^0, 150^0, 222^0, 294^0\}$.

Ответ: Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos\varphi$, где $\varphi \in \{78^0, 150^0, 222^0, 294^0\}$.

11 КЛАСС

1. У Олега есть 1000 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы двадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы?

Решение. Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете – 20.

1 способ

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 20-ти оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно:

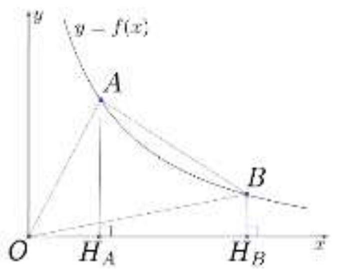
$$C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + \dots + C_{20}^{19} = 2^{19}.$$

2 способ

Рассмотрим 19 цветов 19 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учёта чётности можно 2^{19} способами. Если в букете нечётное количество цветов, то мы его оставляем, если же чётное – добавляем неиспользованный двадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{19}.

Ответ: 2^{19}.

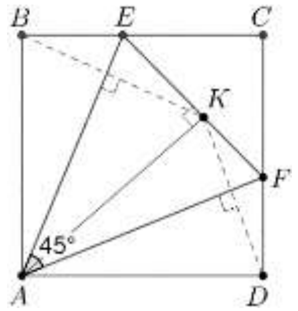
2. Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0, +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой (H_A, H_B — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс; O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



Решение. Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A. Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B. Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем вывод: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{c}{x}, c > 0$.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45^0. Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF.



Решение: Если отразить точку D относительно прямой AF, а затем относительно прямой AE, то она перейдет в точку B. Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. То есть в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90^0 относительно точки A. Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это

одна и та же точка; на рисунке она обозначена K. Из точки K отрезки AE и AF видны под углом 90^0 (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF.
И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.
Ответ: 2.

4. Пусть x_1 и x_2 - наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Решение.
1 способ
Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.
2 способ
Сравнение коэффициентов многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \text{ и } g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + \frac{7}{2}x^2y + 2y^3 = 0 \\ 4x^2 + 7xy + 2y^3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + \frac{7}{2}ty + 2y^3$. При условии выполнения равенств исходной системы, её корнями будут $t_1 = x^2$ и $t_2 = 2x$. Если $t_1 = t_2$, то $x_1 = 0, x_2 = 2$. Отсюда найдём $y_1 = 0, y_2 = -1$. Если $t_1 \neq t_2$, то используя теорему Виета, получим $t_1 \cdot t_2 = 2y^3 \Leftrightarrow 2x^3 = 2y^3 \Leftrightarrow x = y$. Подставляя в исходную систему, найдём третье решение $\left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$

Ответ: $(0;0), (2;-1), \left(-\frac{11}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

6. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения $\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \ldots}}}$

Решение: Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \ldots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F – действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \Rightarrow 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43 \Rightarrow 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т.д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

Ответ: 43.

7. Известно, что число $\cos 6^0$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Решение: Замена $t = \cos\varphi$. Уравнение примет вид: $32\cos^5\varphi - 40\cos^3\varphi + 10\cos\varphi = \sqrt{3}$. Преобразуем левую часть:

$$
\begin{aligned}
&2\cos\varphi(16\cos^4\varphi - 20\cos^2\varphi + 5) = [\text{формулы понижения}] = \\
&= 2\cos\varphi(4(1+\cos 2\varphi)^2 - 10 - 10\cos 2\varphi + 5) = \\
&= 2\cos\varphi(4\cos^2 2\varphi \ - 2\cos 2\varphi - 1) == 2\cos\varphi(2(1+\cos 4\varphi) - 2\cos 2\varphi - 1) \\
&== 2\cos\varphi(-4\sin 3\varphi\sin\varphi + 1) = -4\sin 3\varphi\sin 2\varphi + 2\cos\varphi = \\
&= -2(\cos\varphi - \cos 5\varphi) + 2\cos\varphi = 2\cos 5\varphi.
\end{aligned}
$$

Окончательно, $\cos 5\varphi = \sqrt{3}/2$. Отсюда $\varphi = \pm\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$. Поскольку у первоначального уравнения ровно пять действительных корней (по условию), то, чтоб их предъявить, достаточно взять какие-нибудь пять значений φ, косинусы которых различны. Например, $\varphi \in \{6^0, 78^0, 150^0, 222^0,\ 294^0\}$.

Ответ: Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos\varphi$, где $\varphi \in \{78^0, 150^0, 222^0,\ 294^0\}$.

8. Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (То есть множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B. Если, например, $A = \{0,1,2\}, B = \{1,2\}$, то $C = \{1,2,3,4\}$.)
Известно, что $C = \{0,1,2, \dots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2020} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}$$

Докажите или опровергните следующие утверждения:
1) и множество A, и множество B содержат конечное число членов;
2) все элементы множеств A и B – целые числа;
3) минимальный элемент множества B не превосходит числа $(2^{2828} - 2^{2525})$.

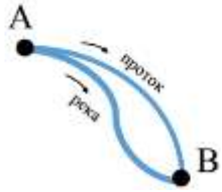
Решение. 1) верно: если множество A или множество B бесконечно, то и множество C будет бесконечно. Поэтому можем обозначить через a, b, c максимальные элементы этих множеств соответственно и заметить для решения п.3, что $a + b = c$. Отдельно отметим, что такие множества существуют: например, $A = \{0, \dots, a\}$, $B = \{0, \dots, c - a\}$.
2) верно: через разложение по биному доказывается, что a целое. Тогда если бы B содержало нецелые, то и C содержало бы нецелые. Поэтому все элементы множества B целые. Отсюда аналогично получаем, что все элементы множества A целые.
3) утверждение верно.
Заметим, что $2020 = 5 \cdot 404$, $2828 = 7 \cdot 404$, $a < 1 + a_1$, где

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \left((\sqrt{2}+1)^5\right)^{404} = (41 + 29\sqrt{2})^{404} = (82.0\dots)^{404} < 127^{404} = \\
&= 128^{404}(1 - \tfrac{1}{128})^{404} < 2^{7\cdot 404}(1 - \tfrac{1}{128}) < 2^{2828} - 2.
\end{aligned}
$$

Тогда $b = c - a > 2^{2828} - (1 + 2^{2828} - 2) = 1$.

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС



1. Расстояния от пункта A до пункта B по реке и по протоку одинаковы и равны 1 км. Скорость течения в протоке равна V км/ч, а в реке $(2V+1)$ км/ч. Течение и в реке, и в протоке направлено от A к B. Если к разности времен движения катера по протоку из B в A и обратно по протоку прибавить время движения плота по реке из A в B, то получится ровно 1 час. На сколько километров в час скорость катера больше скорости течения в протоке? Значение V не дано. В ответе должно получиться число.

Решение. Пусть $S = AB = 1$ км, U км/ч – собственная скорость катера,

$V_1 = 2V + 1$ км/ч – скорость течения в реке, $T = 1$ ч – данное в задаче время.

По условию

$$\frac{S}{U-V} - \frac{S}{U+V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Пусть $x = U - V$ – искомая разность. Тогда

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{x+2V} + \frac{S}{V_1} = T.$$

Преобразовав, получим относительно x уравнение

$$(S - TV_1)x^2 + 2V(S - TV_1)x + 2SV_1V = 0.$$

Заметим, что $S - TV_1 = -2SV \neq 0$. Значит, уравнение можно на эту величину поделить: $x^2 + 2Vx - 2V - 1 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2V - 1$. Корень x_2 отрицателен, поэтому $U - V = x_1 = 1$.

Ответ: 1 км/ч.

2. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы.

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 & \text{(а)} \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 & \text{(б)} \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 & \text{(в)} \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 & \text{(г)} \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \mathrm{b}_2 b_3 - b_1 b_4$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2 b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4 b_4 = 1 - a_3 b_2 = 1 - a_2 b_3 = -6$.

Ответ: $a_4 b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства

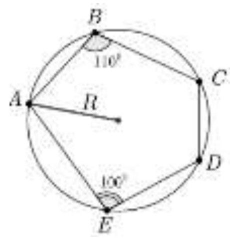
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

3. Решите уравнение $2^x + 2^y = 2^{xy-1}$ в целых числах.

Решение. Пусть сначала $x = y$. Тогда уравнение примет вид $2^x + 2^x = 2^{x^2-1}$.
Отсюда $2^{x+1} = 2^{x^2-1} \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -1$ или $x = 2$.
Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим $y = x + n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $2^x + 2^{x+n} = 2^{xy-1} \Leftrightarrow 1 + 2^n = 2^{xy-1-x}$, что невозможно, так как левая часть – нечетное число, превосходящее 2, а правая часть либо четна (если $xy - 1 - x \geq 1$), либо не превосходит 2 (если $xy - 1 - x < 1$).
Ответ: $(-1, -1), (2, 2)$.

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность радиуса R. Известно, что $\angle B = 110^0, \angle E = 100^0$. Найдите сторону CD.



Решение. Градусные меры дуг $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{CA}$ равны соответственно $2 \cdot (180^0 - \angle E)$ и $2 \cdot (180^0 - \angle B)$. Сумма градусных мер дуг $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{CA}$ и $\overset{\frown}{DC}$ равна 360^0. Значит, величина угла CAD (равная половине градусной меры дуги $\overset{\frown}{DC}$) определяется равенством[1] $\angle CAD = \angle B + \angle E - 180^0 = 30^0$. По формуле для радиуса описанной около треугольника CAD окружности находим[2]

$$R = \frac{CD}{2 \cdot \sin \angle CAD} = CD.$$

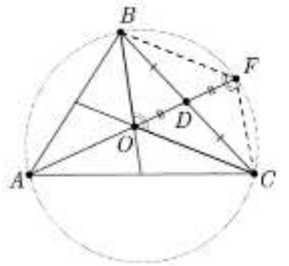
Ответ: $CD = R$.
Комментарии.

- [1] Отсюда следует, что *сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше* 180^0.
- [2] Имеют место аналогичные формулы:

$$-2R = \frac{CD}{\sin(\angle B + \angle E)} = \cdots = \frac{BC}{\sin(\angle A + \angle D)}.$$

Оказывается, эти равенства выражают *необходимое и достаточное условие* того, что около данного пятиугольника можно описать окружность радиуса R.

5. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A, если $\angle BAC = 35^0$, $\angle BOC = 145^0$, $BC = a$.



Решение. Обозначим длину искомой медианы AD за m. На прямой AD вне треугольника отметим такую точку F, что $OD = DF = m/3$. Четырехугольник $OBFC$ – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам (по условию$BD = DC$,и $OD = DF$ по построению). В параллелограмме противоположные углы равны, следовательно

$$\angle CFB = \angle BOC. \qquad (1)$$

В четырехугольнике $ABFC$, по условию, а также в силу равенства (1), сумма противоположных углов BAC и CFB равна 180^0. Значит, вокруг четырехугольника $ABFC$ можно описать окружность. Известно, что если две хорды окружности, BC и AF, пересекаются в точке D, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, то есть $BD \cdot DC = AD \cdot DF \Leftrightarrow (a/2)^2 = m \cdot m/3$. Отсюда $m = a\sqrt{3}/2$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0), B(1424233, 2848467), C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

Решение. Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно $BC = \sqrt{5}$. Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $1/\sqrt{5}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,50.

7. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение. Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x – некоторое 98-значное число. Посмотрим какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу x приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда,

- если $m = 0$, то припишем 12 или 21;
- если $m = 1$, то припишем 11;
- если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных 3.) Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$. Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98}$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96}$$
$$\dots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины $A_4, \dots, A_{98}$ при этом сокращаются), получим
$$A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{98}.$$
Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что $A_2 = 2$.

Тогда $A_{100} = 2 + \frac{4^{50}-4}{3} = \frac{4^{50}+2}{3}$.

Ответ: $\frac{4^{50}+2}{3}$.

8. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют *целочисленной*, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

Решение. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до перестановки слагаемых способом, а именно: $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя[1]: $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа: $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$. Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежат 8 целочисленных точек:
$$(4, 33), (33, 4), (9, 32), (32, 9), (12, 31), (31, 12), (23, 24), (24, 23).$$
Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

Ответ: Например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий. [1]Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что $5 = (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2$. Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично, $13 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$. В то же время число $65 = 5 \cdot 13$ в виде произведения двух комплексно сопряженных множителей представимо двумя способами:
$$5 \cdot 13 = (2 + 3i)(2 + i) \cdot (2 - 3i)(2 - i) = (1 + 8i) \cdot (1 - 8i) = 1^2 + 8^2$$
или
$$5 \cdot 13 = (2 - 3i)(2 + i) \cdot (2 + 3i)(2 - i) = (7 - 4i) \cdot (7 + 4i) = 7^2 + 4^2.$$

10 КЛАСС

1. Решите уравнение $2^x + 2^y = 2^{xy-1}$ в целых числах.

Решение. Пусть сначала $x = y$. Тогда уравнение примет вид $2^x + 2^x = 2^{x^2-1}$.

Отсюда $2^{x+1} = 2^{x^2-1} \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = -1$ или $x = 2$. Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим $y = x + n, n \in \mathbb{N}$. Тогда $2^x + 2^{x+n} = 2^{xy-1} \Leftrightarrow 1 + 2^n = 2^{xy-1-x}$, что невозможно, так как левая часть – нечетное число, превосходящее 2, а правая часть либо четна (если $xy - 1 - x \geq 1$), либо не превосходит 2 (если $xy - 1 - x < 1$).

Ответ: $(-1, -1), (2, 2)$.

2. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1,2,3. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение. Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием одной цифры справа к 99-значному числу. Известно, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть x – 99-значное число. К нему справа можно приписать только одним способом цифру 1,2 или 3, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Действительно, если x при делении на 3 дает остаток ноль, то припишем 3, если 1, то 2 и если 2, то 1. Таким образом, 100-значных чисел, кратных 3, ровно столько же сколько 99-значных чисел. Последних, очевидно, всего 3^{99}.

Ответ: 3^{99}.

3. Решите уравнение $\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение

$$sin^3x + sinxcosx(sinx + cosx) + 6cos^3x = 0;$$

$$sin^3x + sin^2xcosx + sinxcos^2x + 6cos^3x = 0.$$

Если $cosx = 0$, то подставляя в уравнение, получим $sinx = 0$, чего быть не может.

Разделим на cos^3x:

$$tg^3x + tg^2x + tgx + 6 = 0.$$

Сделаем замену $y = tgx$:

$$y^3 + y^2 + y + 6 = 0;$$

$$(y + 2)(y^2 - y + 3) = 0;$$

$$y = -2, tgx = -2, x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z.$$

Ответ: $x = -arctg2 + \pi n, n\epsilon Z$.

4. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1 & \text{(а)} \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0 & \text{(б)} \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0 & \text{(в)} \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1 & \text{(г)} \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$\boldsymbol{a_2 \cdot \Delta = b_2}. \qquad (\mathbf{2})$$

Здесь $\boldsymbol{\Delta = b_2b_3 - b_1b_4}$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4b_4 = 1 - a_3b_2 = 1 - a_2b_3 = -6$.

Ответ: $a_4b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

5. На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежат ровно 32 целочисленные точки (точку называют *целочисленной*, если ее абсцисса и ордината – целые числа).

Указание. *Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $4k + 1$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.*

Решение. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов большим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным с точностью до перестановки слагаемых способом, а именно: $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя[1]: $65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2$. Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим 4 способа: $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$. Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежат 8 целочисленных точек: $(4, 33), (33, 4), (9, 32), (32, 9), (12, 31), (31, 12), (23, 24), (24, 23)$. Следовательно, всего на этой окружности лежат 32 целочисленные точки.

Ответ: Например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий. [1]Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что $5=(2+i)(2-i)=2^2+1^2$. Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично, $13=(2+3i)(2-3i)=2^2+3^2$. В то же время число $65=5\cdot 13$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных множителей представимо двумя способами:

$$5\cdot 13=(2+3i)(2+i)\cdot(2-3i)(2-i)=(1+8i)\cdot(1-8i)=1^2+8^2$$

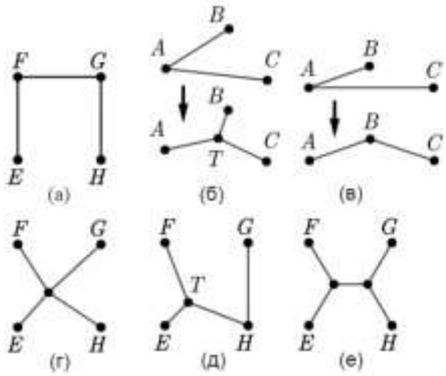
или

$$5\cdot 13=(2-3i)(2+i)\cdot(2+3i)(2-i)=(7-4i)\cdot(7+4i)=7^2+4^2.$$

6. В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение (которое допустимо использовать без доказательства). *Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше 120^0. Сумма расстояний $AT+BT+CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом 120^0 (T – точка Торичелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен 120^0, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.*

Решение. Предположим, что у нашей системы дорог перекрестков нет, то есть имеется одна дорога, соединяющая последовательно вершины квадрата E,F,G и H. Тогда ее длина будет не меньше трех сторон квадрата (буквы «П» на рис. (а)), то есть не меньше 12 (дорога, соединяющая соседние вершины квадрата, не меньше его стороны).



Значит, искомая (а в идеале кратчайшая) система дорог должна иметь перекрестки (например, как на рис. (д)). Чтобы понять каким образом можно эффективно общую длину дорог уменьшать, полезно прежде обратить внимание на некоторые свойства, которыми *кратчайшая система дорог* обязана обладать:

i. Кратчайшая система дорог состоит из отрезков, соединяющих перекрестки и вершины квадрата. Это очевидно, поскольку кратчайшим путем из одной точки в другую является отрезок прямой. Отметим без доказательства, хотя и это почти очевидно, что для любой системы городов кратчайшая система дорог их соединяющая – это связный граф без замкнутых путей, ребрами которого служат отрезки.

ii. Каждый перекресток должен быть соединен минимум с тремя вершинами графа (вершинами квадрата или перекрестками). (Если он соединен только с двумя, то смысла в нем немного: его можно удалить, а эти две вершины соединить напрямую; получится короче.)

iii. Угол между любыми двумя дорогами, выходящими из одного перекрестка (или из одной вершины квадрата) не может быть меньше 120^0. Действительно, пусть из точки A выходят дороги AB и AC, и угол BAC меньше 120^0. Тогда дороги AB и AC можно заменить дорогами с меньшей суммарной длиной. Если в треугольнике ABC все внутренние углы меньше 120^0, тот дороги AB и AC заменим на дороги TA, TB и TC, где

T – точка Торичелли треугольника ABC (рис. (б)). Если же, например, угол B больше 120^0, то AB и AC заменим на AB и BC (рис. (в)).

iv. Из одного перекрестка выходят ровно три дороги под углами 120^0 (иначе длина дорог может быть уменьшена). Это немедленно следует из свойств (ii) и (iii).

Предположим, что система дорог обладает одним перекрестком. Если он соединен со всеми вершинами рис. (г), то длина дорог не меньше суммы диагоналей, которая равна $8\sqrt{2} > 11$. Если же он соединен только с тремя вершинами (рис. (д)), то T – точка Торичелли треугольника EFH, вершина G соединена с F. В этом случае длина дорог приблизительно равна 11,7. Более того, нарушено свойство (iii), так как $\angle THG < 120^0$, а значит длину дорог можно уменьшить, добавив еще один перекресток (как в случае на рис. (б)).

Пусть перекрестков два. Из соображений симметрии расположим их на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (е)) так, чтобы из каждого перекрестка дороги выходили под углами 120^0 (свойство (iv)). В этом случае суммарная длина дорог равна $4 \cdot (\sqrt{3} + 1) < 10{,}92$.

Ответ: Например, система дорог с двумя перекрестками на параллельной двум сторонам оси симметрии квадрата (рис. (е)). Из каждого перекрестка дороги выходят под углами 120^0. Их суммарная длина равна $4 \cdot (\sqrt{3} + 1) < 11$.

Комментарий. Система дорог на рис. (е) называемая *сетью Штейнера* данных четырех точек, вершин квадрата E, F, G и H. Без доказательства отметим, что эта система имеет минимальную длину из всех возможных.

7. Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0,0), B(1424233, 2848467), C(1424234, 2848469)$. Ответ округлите до сотых.

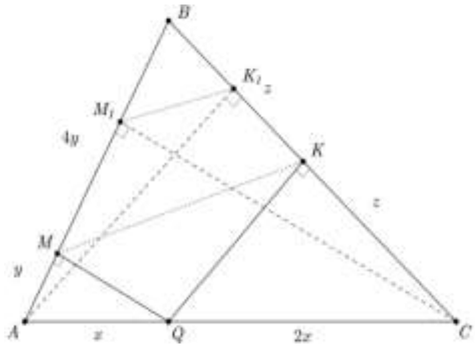
Решение. Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно $BC = \sqrt{5}$. Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $1/\sqrt{5}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,50.

8. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что $AQ{:}\,QC = 1{:}\,2$.

Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом $BM{:}\,MA = 4{:}\,1$, $BK = KC$. Найдите $MK{:}\,AC$.



Решение. Проведем высоты AK_1 и CM_1. Идея решения в следующем: покажем, что треугольники M_1BK_1, MBK и ABC друг другу подобны; отсюда будет легко найти требуемое отношение.

Обозначим длины:

$AQ = x,\ QC = 2x, CK = z,\ KB = z,\ BM = 4y,\ MA = y.$

Из подобия треугольников AK_1C и QKC находим

$$KK_1 = КС \cdot AQ/QC = z/2.$$

Аналогично, так как $\Delta AQM \sim \Delta ACM_1$, то

$$MM_1 = QC \cdot AM/AQ = 2y.$$

Таким образом, так как $BK_1 = KK_1$ и $MM_1 = M_1B$, то $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta MBK$ с коэффициентом подобия 2 (их общий угол лежит между пропорциональными сторонами). Хорошо известно, что треугольник, образованный двумя основаниями высот и вершиной, подобен исходному, а именно: $\Delta M_1BK_1 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos \angle B$. Значит, $M_1K_1 : AC = \cos \angle B$ и тогда:

$$MK : AC = 2\cos \angle B. \qquad (1)$$

Остается вычислить $\cos \angle B$. Площади подобных треугольников ΔM_1BK_1 и ΔABC относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{BM_1 \cdot BK_1}{BA \cdot BC} = \frac{2y \cdot \frac{z}{2}}{5y \cdot 2z} = \cos^2 \angle B.$$

Отсюда $\cos \angle B = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Подставив найденное значение в (1), получаем ответ.

Ответ: $MK : AC = \frac{2}{\sqrt{10}}$.

11 КЛАСС

1. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9)$.

Решение.

$$2^{\log_2^2 x} - 12 \cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}(x^2 - 6x + 9) \Leftrightarrow$$
$$x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 3 - \log_{3-x}(3 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} - 12 \cdot x^{-\log_2 x} < 1 & (1) \\ x < 3, \ \ x \neq 2. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1) системы. Обозначим $x^{\log_2 x} = y, y > 0$. Тогда (1) $\Leftrightarrow y - \frac{12}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{(y+3)(y-4)}{y} < 0$. Так как $y > 0$, то $y \in (0, 4)$.

Отсюда $x^{\log_2 x} < 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}$ – это ответ в неравенстве (1). Далее учтем ограничения (2). Для этого сравним числа $2^{\sqrt{2}}$ и 3.

Заметим, что $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$ и $2^{1,5} < 3$, так как $8 = (2^{1,5})^2 < 3^2 = 9$. Поэтому $2^{\sqrt{2}} < 3$.

Запишем ответ с учетом (2).

Ответ: $x \in \left(2^{-\sqrt{2}}, 2\right) \cup \left(2, 2^{\sqrt{2}}\right)$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 1$.

Решение. Сделаем замену

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \alpha \in (-\pi, \pi). \qquad (1)$$

Тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha, \ \ \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha,$$

и исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} = 1. \qquad (2)$$

Если $\cos\alpha < 0$, то левая часть (2) строго меньше 1, и корней у (2) нет. В случае же, когда $\cos\alpha \geq 0$ и $\sin\alpha \geq 0$, имеем очевидное неравенство

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \geq \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Причем равенство достигается, только когда или $\cos\alpha = 1$, или $\sin\alpha = 1$. Значит, либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \pi/2$. Подставив найденные значения α в (1), найдем искомое t.

Ответ: $t \in \{0, 1\}$.

3. Рассмотрим всевозможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1 и 2. Сколько среди них делятся на 3 нацело?

Решение: Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x – некоторое 98-значное число. Посмотрим какие справа две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно к числу x приписать, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3. Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда,

- если $m = 0$, то припишем 12 или 21;
- если $m = 1$, то припишем 11;
- если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два кратных трем 100-значных числа. Каждое не кратное трем 98-значное число порождает только одно кратное трем 100-значное число. Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных 3.) Тогда количество кратных трем 100-значных чисел может быть найдено по формуле $A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}$. Верны, таким образом, следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98}$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96}$$
$$\ldots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины $A_4, \ldots, A_{98}$ при этом сокращаются), получим $A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{98}$. Остается просуммировать геометрическую прогрессию и заметить, что $A_2 = 2$. Тогда $A_{100} = 2 + \frac{4^{50}-4}{3} = \frac{4^{50}+2}{3}$.

Ответ: $\frac{4^{50}+2}{3}$.

4. Решите уравнение $2^x + 2^y = 6^t$ в целых числах.

Решение. Пусть сначала $x = y$. Исходное уравнение в этом случае примет вид

$$2^{x+1} = 6^t. \qquad (1)$$

Если $t > 0$, то правая часть (1) кратна трем, а левая – нет. Значит, $t \leq 0$. Если же предположить, что $t < 0$, то, переписав (1) в виде $2^{-x-1} = 6^{-t}$, вновь придем к противоречию: кратное трем число 6^{-t} не может быть никакой степенью двойки. Поэтому $t = 0$ и $x = y = -1$.

Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим

$$y = x + n, n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$2^x \cdot (1 + 2^n) = 6^t. \qquad (3)$$

Заметим, что $t \geq 0$. Действительно, из (3) следует, что $3^{-t} \cdot (1 + 2^n) = 2^{t-x}$. Если $t < 0$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая – нет. Значит, $t \geq 0$. Но тогда и $x \geq 0$ (иначе, согласно (3), дробное число равнялось бы целому). Число 2 входит в канонические разложения на простые множители левой и правой частей (3) в одной и той же степени, поэтому

$$x = t. \qquad (4)$$

Сократив обе части (3) на 2^x и перенеся 1 в другую часть, получим

$$2^n = 3^t - 1. \qquad (5)$$

Решим уравнение (5), предполагая n натуральным, а t – неотрицательным целым.

- Пусть $n = 1$. Тогда $t = 1$. С учетом (2) и (4) находим решение исходного уравнения:

$$x = 1, y = 2, t = 1;$$

- Пусть $n > 1$. Тогда левая часть (5) кратна 4. Если t нечетно, то правая часть (5) на 4 не делится. Значит, $t = 2m, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$. Из (5) следует, что $2^n = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Значит, числа $3^m - 1$ и $3^m + 1$ являются степенями двойки. Заметим также, что на числовой оси эти числа находятся друг от друга на расстоянии 2. Такое возможно, только если $3^m - 1 = 2$ и $3^m + 1 = 4$. Отсюда $m = 1$ и тогда $t = 2, n = 3$. Подставляя найденные значения в (2) и (4), получаем решение:

$$x = 2, y = 5, t = 2.$$

Ответ: $(-1, -1, 0), (1, 2, 1), (2, 5, 2)$ (при условии $x \leq y$).

5. Восемь чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_3 = 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_4 = 0 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 = 0 \\ a_3 b_2 + a_4 b_4 = 1. \end{cases}$$

Известно, что $a_2 b_3 = 7$. Найдите $a_4 b_4$.

Решение. Докажем, что[1]

$$a_2 b_3 = a_3 b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы

$$\begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_3 = 1 & (а) \\ a_1 b_2 + a_2 b_4 = 0 & (б) \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 = 0 & (в) \\ a_3 b_2 + a_4 b_4 = 1 & (г) \end{cases}$$

на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1. В результате получим

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta = \mathrm{b}_2 b_3 - b_1 b_4$. Аналогично, из (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

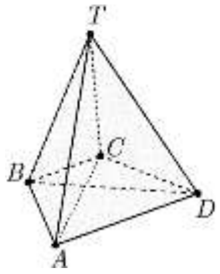
Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит и $a_2 b_3 = 0$, что противоречит условию задачи. Остается выразить a_2 и a_3 из (2) и (3) и подставить полученные выражения в (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1), следует, что $a_4 b_4 = 1 - a_3 b_2 = 1 - a_2 b_3 = -6$.

Ответ: $a_4 b_4 = -6$.

Комментарий. [1]Система уравнений в задаче – это покомпонентная запись матричного равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

6. Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.



Решение: Объем пирамиды $TABCD$ равен сумме объемов пирамид $TBCD$ и $TABD$: $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TABD}$. Причем $V_{TABD} = V_{TACD}$, так как у пирамид $TABD$ и $TACD$ общая высота (из вершины T), а также равны площади оснований: $S_{ABD} = S_{ACD}$ (у этих треугольников общее основание BC и равные по длине высоты, проведенные из вершин B и C, поскольку $ABCD$ – трапеция по условию). Итак, $V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TACD} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_2 + \frac{1}{3} \cdot S \cdot r_1$.

Ответ: $\frac{S(r_1+r_2)}{3}$.

7. Дан треугольник ABC. На стороне AC выбирают точку Q таким образом, чтобы длина отрезка MK, где M и K – основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB и BC соответственно, оказалась минимальной. При этом $QM = 1$, $QK = \sqrt{2}$, $\angle B = 45^0$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Длины перпендикуляров, опущенных из точки Q основания AC, обозначим как d_1 и d_2; пусть $\angle B = \beta$. Четырехугольник $MBKQ$ вписан в окружность, и BQ ее диаметр. По формуле для радиуса описанной около треугольника MBK окружности имеем

$$BQ = MK/\sin\beta \ \Rightarrow MK = BQ \cdot \sin\beta. \qquad (1)$$

Поскольку величина угла β фиксирована, длина отрезка MK тем меньше, чем меньше длина BQ. Значит, точка Q – это основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AC, и BQ – высота (основание перпендикуляра Q лежит именно на стороне AC, а не на ее продолжении, так как углы A и C острые; если бы, скажем, угол A был тупым, то точка M оказалась бы на продолжении стороны AB, а не на ней самой); положим $BQ = h$. Найдем площадь ΔABQ, считая пока h известной величиной. Имеем$AQ = h/\sin\angle A = h/\sqrt{1 - d_1^2/h^2}$. Тогда $S_{ABQ} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_1^2}}$. Аналогично, $S_{BQC} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_2^2}}$. Искомая площадь равна их сумме

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = \frac{h^4}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 - d_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2 - d_2^2}}\right). \qquad (2)$$

Остается найти h. Так как $h = BQ$, то из (1) следует, что $h = MK/\sin\beta$. Найдем MK из ΔMQK (в нем $\angle MQK = 180^0 - \beta$) по теореме косинусов: $MK^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\beta$. Итак,

$$h = MK/\sin\beta = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos\beta}}{\sin\beta}.$$

Чтобы воспользоваться (2), прежде для удобства вычислим $h^2 - d_1^2 = \frac{d_1^2+d_2^2+2d_1 d_2\cos\beta - d_1^2\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{(d_1\cos\beta+d_2)^2}{\sin^2\beta}$. Аналогично, $h^2 - d_2^2 = \frac{(d_2\cos\beta+d_1)^2}{\sin^2\beta}$. Подставив полученные выражения в (2), находим $S_{ABC} = \frac{\left(d_1^2+d_2^2+2d_1 d_2\cos\beta\right)^2}{2(d_1\cos\beta+d_2)(d_2\cos\beta+d_1)\sin\beta}$. Используя теперь числовые данные задачи, получаем ответ.

Ответ: $S_{ABC} = \frac{25}{6}$.

8. Найдите все неотрицательные целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$a^2+b^2=841\cdot(ab+1).$$

Решение. Пусть пара чисел (a,b) удовлетворяет уравнению задачи:

$$a^2+b^2=k^2(ab+1), k=29. \qquad (1)$$

Предположим, что одно из чисел, например a, равно нулю. Тогда, очевидно, $b=k$. Поэтому далее будем рассматривать такие решения (a,b) уравнения (1), для которых

$$a\neq 0, b\neq 0. \qquad (2)$$

Более того, будем предполагать, что

$$a\leq b. \qquad (3)$$

Итак, пусть пара (a_0,b_0) удовлетворяет (1), а также условиям (2), (3). Из (1) находим, что $b_0^2-k^2a_0b_0+a_0^2-k^2=0$. Это равенство можно трактовать как квадратное уравнение относительно неизвестной b_0. По теореме Виета, помимо собственно b_0, это уравнение еще имеет корень b_0' такой, что

$$b_0+b_0'=k^2a_0, \qquad (4)$$

$$b_0b_0'=a_0^2-k^2. \qquad (5)$$

Утверждение. Этот новый корень b_0' удовлетворяет условиям: $b_0'\geq 0$, $b_0'\in\mathbb{Z}$ и $b_0'<a_0$.

Доказательство. Числа a_0 и b_0' удовлетворяют (1), поэтому $b_0'\geq 0$ (иначе правая часть (1) была бы отрицательной, так как, по условию задачи и в силу (2), $a_0>0$). Из (4) следует, что неотрицательное b_0' является целым, а из (5) – что $b_0'=\frac{a_0^2-k^2}{b_0}$. Установим, что $b_0'<a_0$. Действительно, $b_0'<a_0\Leftrightarrow\frac{a_0^2-k^2}{b_0}<a_0\Leftrightarrow a_0^2-k^2<a_0b_0\Leftarrow a_0^2\leq a_0b_0$. Последнее верно в силу (3). ■

Таким образом, пара (a_0,b_0), удовлетворяющая уравнению (1) и ограничениям (2), (3), порождает новую пару (см. (4)) вида $(b_0',a_0)=(k^2a_0-b_0,\ a_0)$, которая также удовлетворяет (1), (2), (3) (если, конечно, $a_0\neq k$; так как, согласно (5), b_0' еще может быть найден по формуле $b_0'=\frac{a_0^2-k^2}{b_0}$, так что, если $a_0=k$, то (3) не будет выполнено). Будем эту новую пару обозначать как (a_1,b_1). Затем по тем же формулам можно из пары (a_1,b_1) получить еще решение (a_2,b_2) и т.д. Символически полученный результат представим следующим образом:

$$(a_0,b_0)\to(a_1,b_1)=(k^2a_0-b_0,\quad a_0)\to(a_2,b_2)\to\cdots \qquad (6)$$

Здесь $a_m=k^2a_{m-1}-b_{m-1}, b_m=a_{m-1}$, при этом $a_m>a_{m-1}$(см. утверждение) (7)

Сразу же отметим и формулы обратного преобразования

$$a_{m-1}=b_m, b_{m-1}=k^2b_m-a_m, \qquad (7')$$

с помощью которых можно цепочку (6) продолжить влево. С помощью правила (7), из одного решения (a_0,b_0), удовлетворяющего (1), (2), (3), мы можем получить лишь конечное число новых решений уравнения (1), так как, согласно доказанному утверждению, $a_0>a_1>a_2>\cdots\geq 0$. Значит, на каком-то шаге обязательно получится $a_n=0$ (тогда, как было показано выше, $b_n=k$). Чтобы на n-м шаге получить 0, на предыдущем шаге должно было быть $a_{n-1}=k$ (подставив $a=a_{n-1}=k$ в (1), найдем $b=b_{n-1}=k^3$). Таким образом, окончание цепочки (6) выглядит так:

$$\ldots\to(a_{n-1},b_{n-1})=(k,k^3)\to(a_n,b_n)=(0,k). \qquad (8)$$

(Цепочку (8) вправо продолжать смысла нет, так как далее $(0,k) \to (-k,0) \to (0,k) \to \cdots$.) А вот что предшествует паре $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (k, k^3)$? Согласно $(7')$, на предыдущем шаге $a_{n-2} = k^3$, $b_{n-2} = k^5 - k$ – и это тоже решение уравнения (1)! Можно продолжить, получая новые решения: $a_{n-2} = k^5 - k, b_{n-2} = k^7 - 2k^3$ и так далее. Значит, всего решений у уравнения (1) бесконечно много, так как цепочку (8) можно продолжить влево сколь угодно далеко.

Поясним почему (8) содержит *все решения* (1), удовлетворяющие условию (3). Пусть (a^*, b^*) – какое-то (удовлетворяющее (3)) решение уравнения (1). Было показано, что с помощью формул (7) из решения (a^*, b^*) можно получить цепочку новых решений (см. (6)), которая непременно закончится решением $(0,k)$. Но это и означает, что (a^*, b^*) содержится в (8), ведь, приняв теперь решение $(0,k)$ за отправную точку, мы с помощью обратных преобразований $(7')$ вернемся к (a^*, b^*) (а цепочка (8) именно так и устроена: начав с $(0,k)$, мы с помощью $(7')$ получаем ее всю).

Чтобы записать ответ несколько поменяем нумерацию: положим $(a_0, b_0) = (0,k)$ и двинемся с помощью $(7')$ по цепочке (8) влево (у нас будет $(a_1, b_1) = (k, k^3), (a_2, b_2) = (k^3, k^5 - k)$ и т.д.).

Ответ: Решениями (a,b) (при условии $a \le b$) служат те и только те пары чисел (a_n, b_n), которые каждом $n \in \mathbb{N}$ вычисляются по формулам: $a_n = b_{n-1}, b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1}$, $a_0 = 0, b_0 = k$; здесь $k = 29$.